Spezielle Relativitätstheorie mal anders:

Ist die Lichtgeschwindigkeit wirklich eine Grenzgeschwindigkeit?

Unser Ziel:

Ich fange mal mit dem Ende an:

Die Lichtgeschwindigkeit c als höchste Geschwindigkeit (Grenzgeschwindigkeit) gibt es nur für Beobachter, die außerhalb bewegter Systeme stehen. Für die Realität in einem bewegten System gibt es keinerlei Geschwindigkeitsbegrenzung, da kann Licht unendlich schnell sein.

Die charakterisierende Eigenschaft des Kosmos ist nicht die Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit, sondern eine „innere Eigenkausalität", die zu einer nicht umkehrbaren inneren Strukturierung des Kosmos führen kann.

Nun will ich versuchen, das zu begründen.

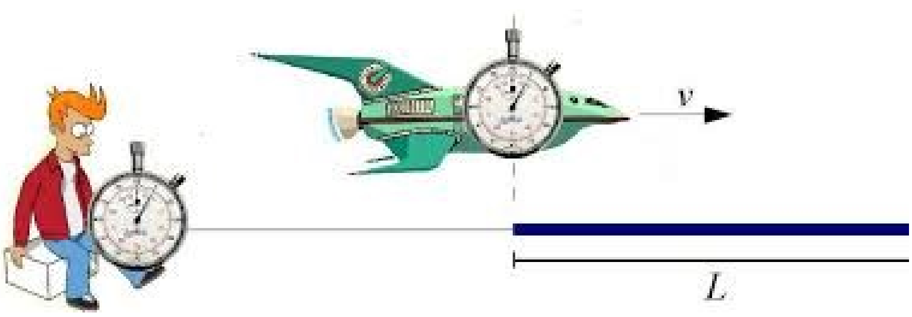
Ich kann viele der Formeln der speziellen Relativitätstheorie SRT nicht hier herleiten, insbesondere nicht die, die wir hier anwenden werden. Diese Herleitungen sind zwar überschaubar und nachvollziehbar, aber eher länglich und sprengen den Rahmen.

Man findet sie u.a. in Bartelmann et al „Theoretische Physik" sowie in Ulrich Walter Astronautics – the Physics of Space Flights", beide erschienen bei Springer.

Im Buch von Walter habe ich auch dieses Konzept etwas abstrakter betrachtet gefunden.

Der Blick von außen in das Raumschiff:

Übliche Darstellungen der Relativitätstheorie beschreiben Vorgänge im Inneren vorbeifliegender Raumschiffe so wie sie einem äußeren nicht mitbewegten Beobachter erscheinen.



Physik HU, Berlin

Deswegen werden die Raum-Zeit-Koordinaten dieses äußeren Beobachters als die wesentlichen angesehen und ohne Strich `bezeichnet: (x,y,z,c*t).

Die Raum-Zeit-Koordinaten im Inneren des Raumschiffes werden gestrichen markiert: (x`,y`,z`, c*t`).

Wir vereinfachen das, in dem wir nur eine Raumkoordinate nehmen. Das Raumschiff kann sich nur längs der x-Achse bewegen und auf dieser liegt auch die mit v mitbewegte x`-Achse.

Um Raum und Zeit gleich zu behandeln, wird statt t der Lichtweg c*t bzw. c*t` genommen.

Da die Herleitung der SRT davon ausgeht, dass die (Vakuum-) Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen gleich ist, steht in beiden Fällen c und nicht einmal c und einmal c`.

Also:

Der äußere (eindimensionale) Beobachter B beschreibt die Welt mit den Koordinaten (x, c*t). Im mit der Geschwindigkeit v relativ zu B bewegten Raumschiff werden die mitbewegten Koordinaten (x`, c*t`) verwendet.

Die Aufgabe der SRT ist es nun, eine Umrechnung zwischen diesen beiden Koordinatensystemen in Abhängigkeit zur Geschwindigkeit v zu ermöglichen.

Damit kann man dann Längen messen, Geschwindigkeiten zusammenzählen und Zeitabschnitte bestimmen.

Die Umrechnung war schon vor Einstein bekannt, sie wird nach ihrem Erfinder Lorentz-Transformation genannt.

Man kann sie nur mit Mittelstufenmathematik aus dem Gesetz von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und dem Speziellen Relativitätsprinzip (die Naturgesetze sind in allen relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Systemen gleich) herleiten.

Die Lorentztransformationen LT :

Die folgenden Gleichungen transformieren die Zeit t des außenstehenden Beobachters in die Zeit t` im Raumschiff und einen Ort x im Außenraum in den entsprechenden Ort x` ,gemessen aus dem bewegten Raumschiff heraus:

t`= $\gamma * (t - v/c^2 * x)$

x`= $\gamma * (x - v*t)$

wobei $\gamma = 1 / \sqrt{1-\beta^2}$ mit $\beta = v/c = \tanh(R)$

Später werden wir tanh als Tangenshyberbolicus kennenlernen und R als die Rapidität.

Bezugssystemwechsel als Drehung darstellen:

Poincaré hat schon 1905 erkannt, dass man die LT als Drehungen auffassen kann, wenn man die Zeitkoordinate imaginär darstellt, also als Vielfaches von i = $\sqrt{-1}$.

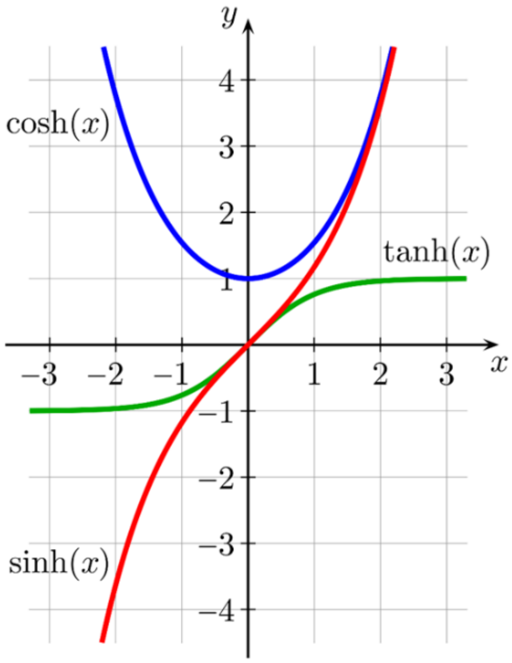
Wir geben hier mal die Drehmatrix an, das ist eine Zahlentabelle, mit der man die gedrehten Koordinaten ausrechnen kann.

Dazu muss ich, allerdings nur hier, die Koordinaten in der üblichen Vektorschreibweise angeben:

$\binom{x`}{ct`} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} * \binom{x}{ct}$, dabei ist φ der Drehwinkel.

Keine Angst, damit werden wir nicht rechnen. Wie das geht, lässt sich leicht mit Mathebüchern lernen, ist für uns aber unwichtig.

Nun ersetzen wir durch R = i* φ, gehen also zu imaginären Koordinaten über. Dann wird aus cos φ der Cosinushyberbolicus: cosh (R) und aus sin φ wird der Sinushyberbolicus sinh (R).



Hyperbelfunktionen (Wikipedia)

An der Matrix erkennt man, dass es sich wieder um eine Drehung handeln muss: $\begin{pmatrix} \cosh(R) & \sinh(R) \\ -\sinh(R) & \cosh(R) \end{pmatrix}$.

Die Funktionen sinh und cosh sowie der oben schon erwähnte tanh sind nicht periodisch, sie haben aber ganz ähnliche Eigenschaften wie sin, cos und tan.

Sin, cos und tan können am Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ eingeführt werden, die Hyperbelfunktionen werden an der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ eingeführt.

In der SRT finden sie Verwendung, da beschleunigte Bewegungen in bestimmten Raum-Zeit-Diagrammen Hyperbeln sind.

Nur auf reelle Zahlen angewandt, sind sie nicht periodisch (siehe Abb.), aber auf komplexe Zahlen angewandt besitzen sie eine imaginäre Periode 2*π*i. Auch ansonsten haben sie ähnliche Eigenschaften wie die normalen trigonometrischen Funktionen: wie z.B. $\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$.

Die Ableitung von sinh ist cosh und umgekehrt. Dadurch stimmen die zweiten Ableitungen mit den Funktionswerten überein.

So wie tan x = sin x / cos x ist, gilt auch: tanh x = sinh x / cosh x.

Es ist übrigens Absicht, i* φ mit R zu bezeichnen, also als Rapidität. Dazu aber später mehr.

Die Beschreibung der eigenen Welt

In der SRT wird der „äußere“ Beobachter B als derjenige angesehen, in dessen Welt alles stattfindet und der über die LT umrechnen muss in die bewegte Welt im Raumschiff.

Es ist aber eher andersherum: Die Astronauten im bewegten Raumschiff erleben die Welt und müssen konsistent ihre Erlebnisse beschreiben können, ohne sie umzurechnen, so wie sie in der fiktiven Welt des äußeren Beobachters B passieren.

Sie haben im Raumschiff eigene Messwerte für Zeit, Abstand, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Man spricht von der Eigenzeit: Die **Eigenzeit τ** ist die Zeit, die eine Uhr im Raumschiff misst.

Die **Eigenlänge L_0** ist die Länge, die man im Raumschiff direkt mit den dort vorhandenen Linealen durch Anlegen messen kann.

Die **Eigengeschwindigkeit σ** ist der Messwert für die eigene Bewegung, aus dem Raumschiff heraus bestimmt, oder aber auch die aus dem Raumschiff gemessene Geschwindigkeit eines vorbeifliegenden anderen Raumschiffes.

Die **Eigenbeschleunigung** **α** ist die Beschleunigung, die ein im Raumschiff befindlicher Beschleunigungssensor im Handy des Raumfahrers anzeigt.

Weitere Eigengrößen, wie Eigenkräfte, Eigendrehimpulse etc. wollen wir hier nicht besprechen.

Bestimmung der Eigengrößen

Mit Hilfe der LT kann man die folgenden Formeln recht leicht herleiten. Wir geben sie nur an und besprechen ihre Bedeutung:

Es ist üblich, kurze Zeiten oder Wegstrecken zu betrachten. Dies drückt man in der Mathematik durch ein Differenzial aus: dt ist eine beliebig kurze (aber durchaus auch als sehr lang erlaubte) Zeitdifferenz. Das d steht für Differenz.

Wer mehr über die Differenziale wissen möchte (und manche Überraschung über den Schulgebrauch erleben will), sehe sich mal die ersten Posts in diesem Kurs an: https://www.natur-science-schule.info/blog-2-differenzialgleichungen

Da man in jedem gekrümmten Raum (was auch immer das jetzt bedeuten soll), auch die SRT anwenden kann (wenn man sich auf ganz kleine Bereiche beschränkt), hat sich diese Darstellung eingebürgert.

Eigenzeit

Sei dt eine Zeitdifferenz unseres Beobachters und dt` die entsprechende im Raumschiff, die wir als die dortige Eigenzeit dτ identifizieren.

Dann gilt für die Eigenzeit dτ = 1/ γ * dt = $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ * dt

Da γ immer größer als 1 ist (es ist ja v<c und man sollte darauf achten, dass die Wurzel in einem Nenner steht) erhält man für die Eigenzeit immer einen kleineren Wert als für die Zeit des Beobachters. Die Eigenzeit im Raumschiff verläuft langsamer. Das nennt man die Zeitdilatation.

Übrigens: Auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie gibt es den Begriff der Eigenzeit. Er ist von der Metrik bestimmt, also der Art, wie Raumpunkten Abstände zugeordnet werden. Bekannt ist die sog. Schwarzschild-Metrik, die in der Nähe Schwarzer Löcher gilt.

Hier ergibt sich für den Zusammenhang zwischen der Zeit t eines äußeren Beobachters und der Eigenzeit τ:

$$t = \tau\sqrt{\frac{2r}{2r - 3r_S}}$$

Dabei ist r der Abstand zum Mittelpunkt und r_S der Schwarzschildradius, also der Horizontradius des Schwarzen Lochs.

Im Abstand r = 3/2 * r_S liegt der sog. Lichtring (photon orbit). Hier können Photonen beliebig lange das Schwarze Loch umkreisen.

Eigenlänge:

Sei L die Länge, die der außenstehende Beobachter für ein Objekt im Raumschiff misst, dann ist L´ = L_0 die Eigenlänge im Raumschiff: L_0 = γ * L.

Was bedeutet das? Alle Eigenlängen sind größer als die vom außenstehenden Beobachter gemessenen Längen. Für den außenstehenden Beobachter gibt es eine Längenkontraktion.

In seinem Ruhesystem hat also ein Körper seine größte Länge! Und wie eben gesagt: alle zeitliche Veränderungen dauern im Ruhesystem am längsten.

Das gilt natürlich auch für Wegelemente: dx`= γ * dx, die im Ruhesystem am größten sind.

Wir merken, wie sich die Welt der Ruhesysteme von der äußerer Beobachter unterscheidet. Das spielt aber erst bei sehr hohen Geschwindigkeiten eine Rolle:

Der Gammafaktor:

γ = 1 / $\sqrt{1-\beta^2}$ ist immer größer oder gleich 1. Je näher v an c herankommt, desto größer wird der Gammafaktor, bis er ganz am Ende, wenn v fast c ist, ins Unermessliche steigt:

v = 0,1 c (30 000 km/sec, 10%): γ = 1,005

v = 0,5 c (150 000 km/sec, 50%): γ = 1,15

v = 0,8 c (240 000 km/sec, 80%): γ = 1,67

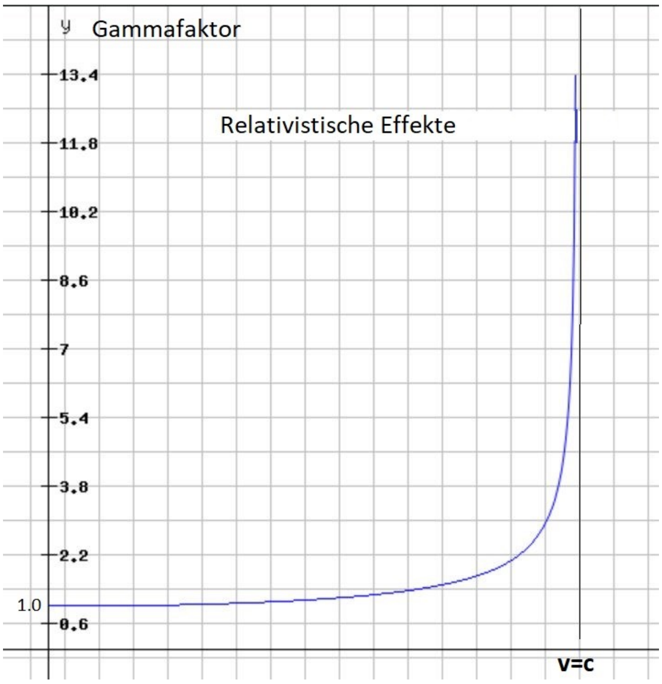
v = 0,9 c (270 000 km/sec, 90%): γ = 2.29

v= 0,99c: γ = 7,01

v = 0,999c: γ = 22,37

Man sieht also, dass relativistische Effekte erst bei unmittelbarer Nähe zur Lichtgeschwindigkeit auftreten.

Das zeigt auch der nebenstehende Graph.



Eigengeschwindigkeit

Geschwindigkeiten sind Ortsänderungen pro Zeit. Das gilt immer, sowohl im Ruhesystem als auch für außenstehende Beobachter. So kommen wir auf die Formel v = ds/dt, wenn ds ein beliebig kurzes Wegstück ist, das in der Zeit dt zurückgelegt wird.

Alle in der Schule behandelten Geschwindigkeiten sind die eines außenstehenden Beobachters.

Wir wollen aber wissen:

Beobachten wir von außen, wie sich das Raumschiff mit der Geschwindigkeit v bewegt, welche Eigengeschwindigkeit würde dann ein mitfliegender Raumfahrer messen?

Geschicktes Anwenden der LT für kurze Strecken und Zeiten und dann das Aufsummieren auf messbare Werte (Integrieren) ergeben für die Eigengeschwindigkeit σ die Formel

σ = c * arctanh (β)

Das Verhältnis der Eigengeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit ist die schon definierte Rapidität R:

σ/c = R = arctanh (β) = ½ * ln[(1+ β)/(1- β)].

Sie entspricht in der komplexen Darstellung dem Neigungswinkel einer Weltlinie.

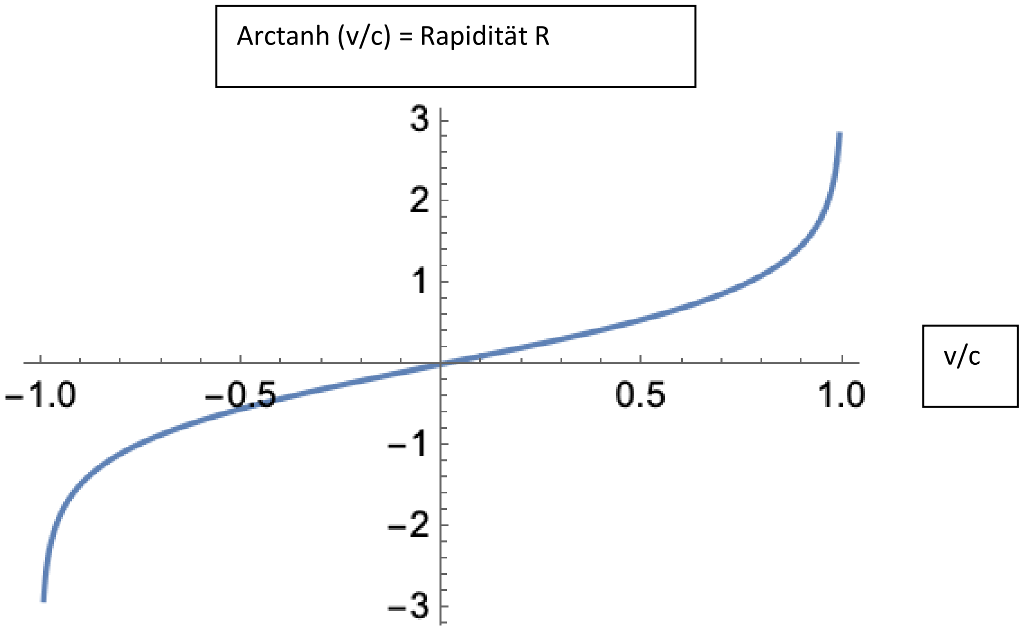
Die andere Darstellung mit dem natürlichen Logarithmus sei nur der Vollständigkeit halber angegeben.

Sieht man sich den Verlauf der arctanh– Funktion an, so erkennt man, das aus dem Verhältnis β = v/c von -1 bis +1 durch den arctanh ein von Minus-Unendlich bis zu Plus-Unendlich gehender Zahlenbereich wird.

Dabei gibt das Vorzeichen nur an, ob v in Richtung oder gegen die Richtung von c verläuft.

Da in der Welt des Beobachters v/c immer kleiner als 1 sein muss, kann die Eigengeschwindigkeit für den Raumfahrer jeden beliebigen Wert annehmen, also letztlich auch unendlich groß werden (v=c).

Das wird uns bald noch ausführlich beschäftigen.



Addition von Geschwindigkeiten

Eine der seltsamsten Gleichungen der Physik ist c = c + v oder 0,8*c + 0,9 c < c

Das ergibt sich, wenn man aus den LT eine Addition der Geschwindigkeiten berechnet: Egal, was ich zu c addiere, es kommt nichts Größeres heraus.

Das Ergebnis sieht so aus (die gar nicht so schwere Herleitung steht in allen Büchern über die SRT):

Wenn wir zwei Geschwindigkeit v und w haben, die im Raumschiff vorkommen und in die gleiche Richtung zeigen, dann ergibt die Messung des außenstehenden Beobachters nicht etwa v + w sondern die Geschwindigkeit

$u =(v+w) * (1/(1+(v*w/c^2))$

Die im bewegten Raumschiff vorkommenden Geschwindigkeiten werden für den außenstehenden Beobachter nichtlinear zusammengefügt, und zwar zu einem Wert, der kleiner als die Summe v+w ist.

In unserem Alltag kennen wir das nicht: 30 km/h + 20 km/h = 50 km/h.

Bei den kleinen Geschwindigkeiten ist $v*w <<< c^2$ und die ganze zweite Klammer ist fast genau 1, somit bleibt v+w als Ergebnis für unseren Alltag kleiner Geschwindigkeiten.

Nun schreiben wir unsere Geschwindigkeitsadditionsformel etwas um:

Wir nehmen β_u = u/c und β_w= w/c und setzen das ein.

Dann erhält man nach einigen Schritten: $u = c * [(\beta_u + \beta_w) / (1+ \beta_u * \beta_w)]$.

Wenn man hier die β-Werte durch den tanh ersetzt und die Eigengeschwindigkeiten einführt, erhält man etwas vollkommen Bekanntes:

Beobachte ich in meinem Ruhesystem zwei gleichgerichtete (Eigen-) Geschwindigkeiten σ_v und σ_w, so kann ich diese Eigengeschwindigkeiten ganz normal zu einer Summen(eigen)geschwindigkeit addieren:

$$\boldsymbol{\sigma_u = \sigma_v + \sigma_w}$$

Eigengeschwindigkeiten werden linear addiert, so wie wir es gewohnt sind!

Das Konzept wird in sich logisch, wenn wir den erwähnten Zusammenhang zwischen Rapiditäten und Drehwinkeln uns in Erinnerung rufen: Führt man Drehungen hintereinander aus, dann addieren sich die Drehwinkel.

Also wäre 0,8*c + 0,9*c = 1,7*c.

Nicht wundern, da gehen wir gleich näher darauf ein.

Konzept der Eigengeschwindigkeiten

Das Konzept der Eigengeschwindigkeiten (oder Rapiditäten, wenn man das Verhältnis zu c angibt) erfüllt also folgende natürliche Bedingungen:

- Eigengeschwindigkeiten sind Größen, die man absolut einem Ruhesystem zuordnen kann.

- Eigengeschwindigkeiten in einem Ruhesystem werden normal linear addiert. 1+1 ist eben doch 2!

- Eigengeschwindigkeiten haben reelle Zahlen als Werte.

- Alle reellen Zahlen können vorkommen und nicht nur die von 0 bis c.

- Für v <<< c geht die Definition der Eigengeschwindigkeit ebenfalls in die der klassischen Geschwindigkeiten über.

Eigenbeschleunigungen:

Beschleunigungen sind als zweite Ableitungen von Wegen definiert: $a = ds^2/dt^2$.

Wendet man darauf die LT an, so erhält man nach etwas umständlicher Umformung und Vereinfachung eine Formel für die Eigenbeschleunigung α, wenn der außenstehende Beobachter die Beschleunigung a feststellt:

$$\alpha = \gamma^3 * a = a * 1/[(1-v^2/c^2)^{3/2}].$$

Natürlich gilt der gewohnte Zusammenhang: Geschwindigkeit = Beschleunigung mal Zeit, wenn man die Eigenwerte nimmt:

$$d\sigma = \alpha * d\tau .$$

Konkretes Zahlenbeispiel (nach Walter)**:**

Ein Beobachter sieht ein Raumschiff mit v = 0,9 c vorbeifliegen. Der Raumfahrer an Bord bestimmt eine Eigengeschwindigkeit von 1,47*c.

Für den Beobachter würde das Raumschiff die 100 000 Lichtjahre große Galaxie in t = 100 000 Lj/ 0,9c = 111000 Jahren durchfliegen.

Für den Raumfahrer vergeht die Eigenzeit von 48 000 Jahren.

Nun nehmen wir an, dass das Raumschiff mit der Eigenbeschleunigung 1 g = 10 m/sec^2 beschleunigt. Dann durchquert es in 11,9 Jahren Eigenzeit die Galaxis und hat am Ende eine Eigengeschwindigkeit von 12,2 c.

Tja, das macht eine Besiedelung der Galaxis möglich!

Im zweiten Beispiel fliegen wir nun in einem besonderen Raumschiff durch den Kosmos: ein Photon.

Photonen als Raumschiffe

Nehmen wir unsere Formel für die Eigengeschwindigkeit:

$\sigma = c * \operatorname{arctanh}(\beta)$

und lösen sie nach $\beta = v/c$ auf:

$\beta = \tanh(\sigma/c)$.

Damit erhalten wir:

$v = c * \tanh(\sigma/c)$.

Schauen wir uns in der Abbildung den Verlauf von tanh an (grüne Kurve), so erkennen wir:

Wenn $v = c$ ist, ergibt der $\tanh(\sigma/c) = 1$ und damit muss σ/c unendlich groß sein, also die Eigengeschwindigkeit unendlich sein.

Der unser Photonenraumschiff sehende äußere Beobachter erkennt die Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit, der Raumfahrer im Photonenraumschiff bestimmt eine unendlich große Eigengeschwindigkeit.

Umgekehrt betrachtet: Da es keine Eigengeschwindigkeiten geben kann, die größer als Unendlich sind, ist für uns die Lichtgeschwindigkeit eine Grenzgeschwindigkeit.

Pragmatisch: Nichts kann schneller sein wie Licht, da nichts schneller als unendlich sein kann….

Man beachte, dass diese Aussage nicht innerhalb eines einzigen Bezugssystems gilt!

Was bedeutet das jetzt für unser Photonenraumschiff?

Da die Eigengeschwindigkeit unendlich ist, muss jede Eigendistanz 0 sein, das Universum ist also für unser Photonenraumschiff punktförmig. Auch die Eigenzeit ist 0.

So „erlebt“ ein Photon das Universum: •

Trotzdem existiert das Photonenraumschiff: Es gibt Energie, Impuls, Drehimpuls und Information in der Eigenzeit 0 an jeden Punkt des Universums ab.

Für uns dauert dieser Vorgang $dt = d\tau / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ unendlich lang.

Das fasst Walter als eine Art innere Kausalität auf: Das Photon „verbindet“ in seiner Eigenzeit instantan jeden Punkt des Universums.

Diese „Eigenkausalität“ ist die eigentliche kosmische Eigenschaft, nicht die Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit.

Da Eigenzeiten nicht negativ werden können, gibt es keine Gegenwirkung, also keine „Gegenkausalität", die unser Photonenraumschiff erfahren könnte.

Diese sicherlich ungewöhnliche Interpretation stellt sich mir als faszinierenden Einblick in die innere Struktur unseres Kosmos dar.

Ausblick

In der Physik spielt die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum drei bedeutende Rollen:

- c ist Grenzgeschwindigkeit für Signalausbreitung.
- c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Felder.
- c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Gravitationswellen.

Über die SRT können wir die endliche Lichtgeschwindigkeit als Folge einer unendlichen Eigengeschwindigkeit interpretieren. Verbindet das die drei genannten Aspekte? Welche Rolle spielt die Metrik dabei? Und was hat das mit Elektrizität und Magnetismus zu tun?